



Deterministisches Chaos und Himmelsmechanik

(Teil 1)

Der Begriff "deterministisches Chaos" scheint ein Widerspruch in sich zu sein:

In der Astronomie glaubte man jahrhundertlang an die Voraussagbarkeit von Bewegungen und Abläufen: Man denke nur an die Gleichmäßigkeit und Berechenbarkeit der Ellipsenbahnen der Planeten. Es schien, als sei die Welt "determiniert", also vorherbestimmt, und das Sonnensystem gleichsam ein riesiges Uhrwerk. "Chaos" und "chaotische Bewegung" sind jedoch intuitive Begriffe, die sich nur schwer mathematisch in einer meßbaren Weise definieren lassen (den Versuch einer mathematischen Definition findet man bei [1], S.306). Diese beschreiben den Sachverhalt, daß die Bewegung eines dynamischen Systems (z.B. Werfen eines Würfels) nicht beliebig genau vorhersagbar ist und somit einen zufälligen und ungeordneten Charakter hat.

Das Bild unseres Sonnensystems als "Uhrwerk" ist jedoch in den letzten Jahren durch die Chaostheorie (nichtlineare Dynamik) und immer bessere Simulationsverfahren als Folge der Fortschritte in der Computertechnologie erschüttert worden:

Für die Bahnen von Pluto und der inneren Planeten konnte nachgewiesen werden, daß diese über lange Zeiträume chaotisch sind.

Dieser Artikel befasst sich mit "deterministischem Chaos", also dem Auftreten von Unvorhersagbarkeit in deterministischen Systemen. Das sind mathematische Modelle der Wirklichkeit, die für Computersimulationen benützt werden.

In diesem ersten Teil des Artikels werden nötige Grundbegriffe erklärt und dazu interessante Beispiele diskutiert.

Im zweiten Teil in der nächsten ROSA URSINA wird dann anhand von drei Beispielen das Auftreten von Chaos in der Himmelsmechanik aufgezeigt und auch die Frage nach der Stabilität des Sonnensystems beantwortet.

Chaotische Systeme

=====

'Das' klassische chaotische System stammt von dem amerikanischen Meteorologen E. Lorenz, der 1963 mit Hilfe von sehr simplen Gleichungen der Strömungsmechanik das Wetter simulieren wollte. Das System war aber äußerst empfindlich auf die Anfangsbedingungen, d.h. zwei sehr nahe beieinanderliegende Anfangszustände führten schon nach sehr kurzer Zeit zu völlig verschiedenen Wetterverhältnissen. Die Empfindlichkeit auf die Anfangsbedingungen ist aber charakteristisch für chaotische Systeme, Wettervorhersagen über mehrere Wochen hinweg erwiesen sich also als unmöglich.

Dieses Phänomen wurde inzwischen schon in beinahe allen Wissenschaften entdeckt, so herrscht selbst in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften (vgl. Börsenkurse, Bevölkerungszahlen) das (mathematische) Chaos!

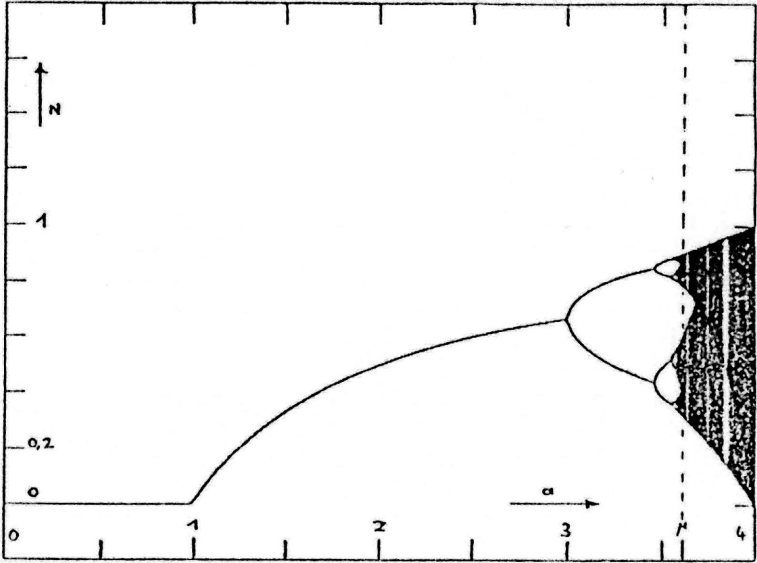


Abb. 1

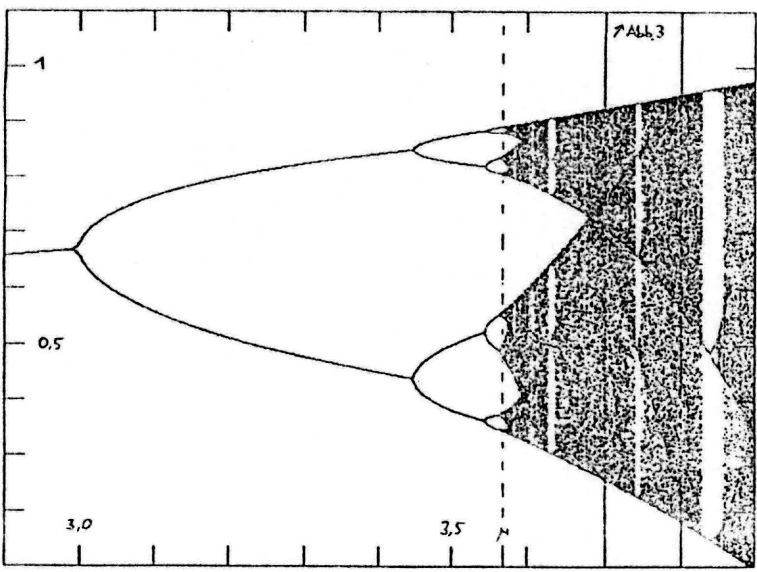


Abb. 2

Besonders eindrucksvoll sind jene mathematischen Beispiele, die man einfach selbst programmieren kann und die zu Hause am Computer chaotisches Verhalten "live" präsentieren:

Die logistische Gleichung

Man betrachte die "logistische Gleichung"

$$N(t+1) = a * N(t) * (1 - N(t)).$$

Diese beschreibt vereinfacht die Entwicklung von Lebewesen einer Population bei beschränktem Nahrungsmittelangebot:

Die Anzahl von Lebewesen zum Zeitpunkt $t+1$ hängt von der Anzahl zum Zeitpunkt t ab (Fortpflanzung) und vom Nahrungsmittelangebot. Mit dem Kontrollparameter a kann man die Fortpflanzungsrate bzw. das Nahrungsangebot variieren.

Unser Computerprogramm berechnet für einige Zeit die Entwicklung der Population und zeigt dann grafisch in Abhängigkeit vom Kontrollparameter a , bei welcher Bevölkerungsstärke sich die Population einpendelt.

In Abb. 1 wird a von 0 bis 4 variiert. Man erkennt vier qualitativ unterschiedliche Bereiche:

$0 < a < 1$: Hier ist $N = 0$, d.h. die Population stirbt aus.

$1 < a < 3$: Die Population pendelt sich auf einen von a abhängigen Wert ein.

$3 < a < \mu$ $\mu = 3.56994\dots$ Die Kurve verzweigt sich immer weiter, d.h. die Population "schwingt" periodisch erst zwischen zwei, dann vier, dann acht, usf. verschiedenen Werten hin und her (Vergrößerung des Bereichs in Abb. 2).

Man spricht hier von "Periodenverdopplung", da sich die Schwingungsperioden der Population bei jeder Verzweigung verdoppeln (vgl. auch [2], Kasten 2).

$a > \mu$: Es treten Bereiche auf, in denen keine feste Periode der Populationsdynamik mehr feststellbar ist: die Entwicklung der Population ist chaotisch (graue Bereiche). Diese werden immer wieder wieder von Bändern periodischen Verhaltens unterbrochen (weiße Streifen).

Um die zwischen den chaotischen Bereichen liegenden periodischen Bereiche zu untersuchen, dehnen wir in Abb. 3 den in Abb. 2 eingezeichneten Streifen in die Länge und vergrößern in Abb. 4 weiter den Bereich um $a = 3,74$.

Verblüfft stellt man fest, daß sich in einem sehr kleinen Teilfenster des ganzen Diagramms das Muster im Kleinen wiederholt, welches das Gesamtbild prägt. Es besteht "Selbstähnlichkeit".

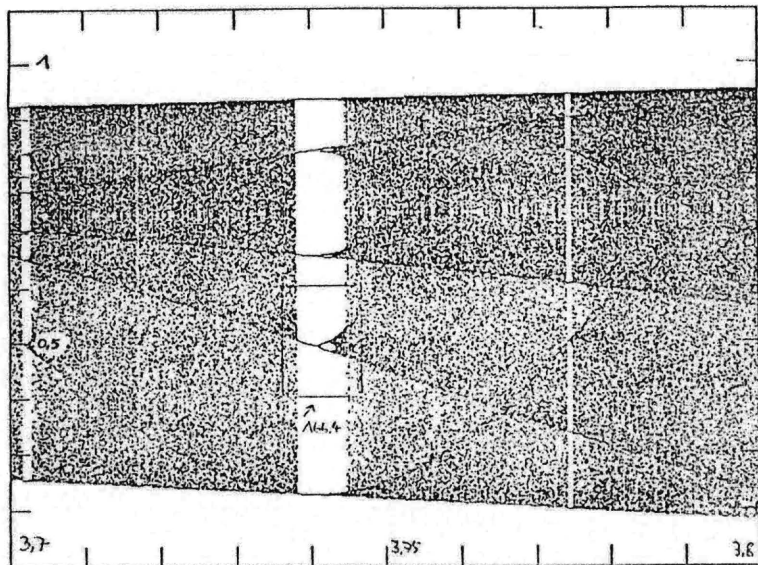


Abb. 3

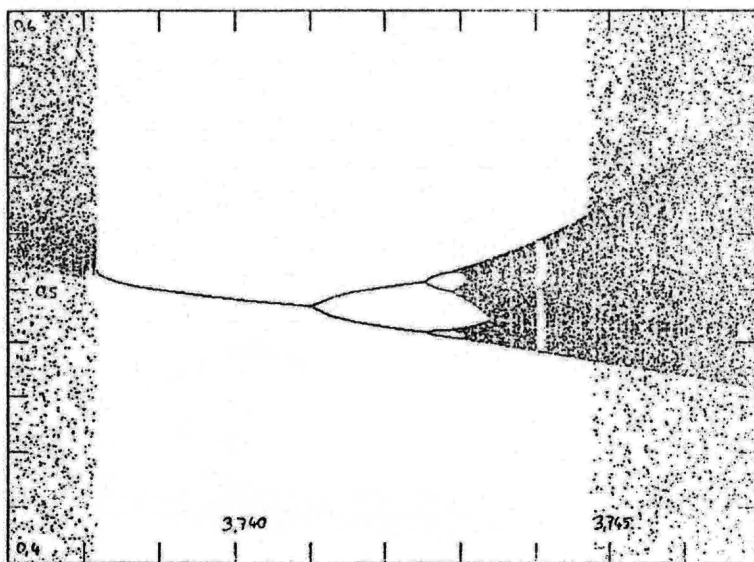


Abb. 4

Der Rössler-Oszillator

=====

Der klassische Weg zum Chaos führt also über Periodenverdopplung, dieses Verhalten zeigen auch viele andere Systeme.

Als weiteres Beispiel soll hier der Rössler-Oszillator dienen, ein dreidimensional schwingendes Teilchen, dessen Bewegung über die Gleichungen

$$\begin{aligned} dx/dt &= -y - z \\ dy/dt &= x + e \cdot y \\ dz/dt &= f + x \cdot z - m \cdot z \end{aligned} \quad \text{bestimmt ist.}$$

Hierbei sind x , y und z die Koordinaten des Teilchens im dreidimensionalen Raum, ihre Ableitungen dx/dt , dy/dt , dz/dt die entsprechenden Komponenten des Geschwindigkeitsvektors, sowie e , f und m Kontrollparameter.

Das Computerprogramm berechnet die Bahnkurve des Teilchens in Abhängigkeit vom Startpunkt im Raum und in Abhängigkeit von e , f und m (für Insider: numerische Lösung der Differentialgleichung mittels Runge-Kutta-Verfahren). Wir halten e und f fest ($= 0,2$) und variieren m . Nach einer Einschwingphase, die hier nicht wiedergegeben ist, erkennt man auf den Abb. 5 bis 12 eine je nach m unterschiedliche Bahnkurve im dreidimensionalen Raum.

Die links stehenden Abbildungen geben die Projektionen der Kurven auf die x - y -Ebene ("Blick von oben"), die rechts stehenden auf die y - z -Ebene ("Blick von vorne") wieder.

Abb. 5/6:	$m = 1,5$	Periodendauer: 1
Abb. 7/8:	$m = 3$	Periodendauer: 2
Abb. 9/10:	$m = 3,85$	Periodendauer: 4
Abb. 11/12:	$m = 4,5$	Periodendauer: unendlich (Chaos)

Die charakteristische Periodenverdopplung vor dem Übergang zum Chaos erscheint auch in diesem Fall wieder.

Chaos in der Hydrodynamik

=====

Die oben bei Computersimulationen beobachteten Effekte treten auch bei Experimenten in der Natur auf:

Beim Rayleigh-Benard-Experiment wird ein flaches, mit Flüssigkeit befülltes Gefäß von unten beheizt. Ab einem bestimmten Temperaturgefälle hilft sich die Natur mit Konvektionsströmungen, um die Wärme auszutauschen. Es entstehen Konvektionsrollen ähnlich wie in den oberen Schichten im Innern der Sonne zum Wärmetransport.

So wie die Konvektion im Sonneninneren sich an der Oberfläche durch die Granulation bemerkbar macht (aufsteigende Gase sind heißer und erscheinen aus Kontrastgründen heller als die absinkenden), so ist das Gefäß an der Oberseite bei aufsteigender Flüssigkeit heißer als bei absinkender.

Erhöht man das Temperaturgefälle, so beginnen die Konvektionsrollen zu oszillieren, erst mit einer Frequenz, dann mit zwei, usf., schließlich tritt Turbulenz auf, wie in der Konvektionszone der Sonne.

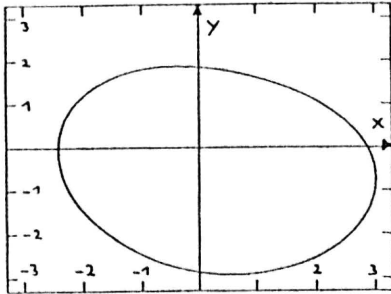


Abb. 5

$m = 1.5$

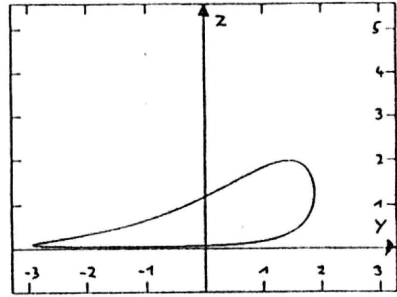


Abb. 6

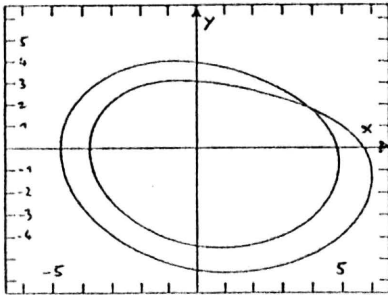


Abb. 7

$m = 3$

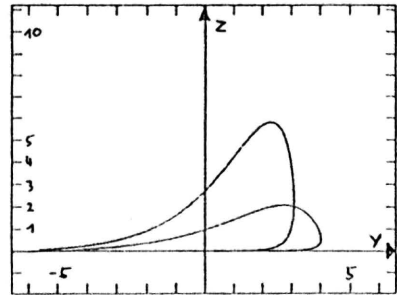


Abb. 8

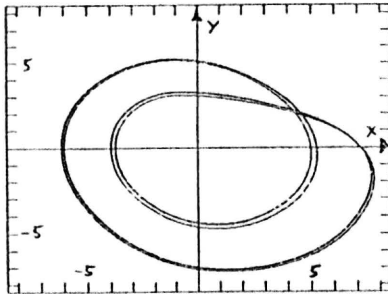


Abb. 9

$m = 3.95$

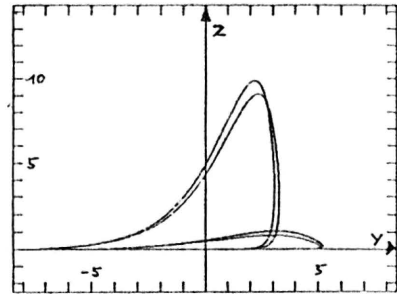


Abb. 10

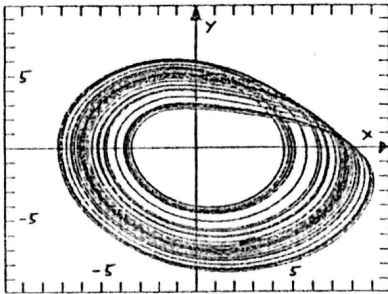


Abb. 11

$m = 4.5$

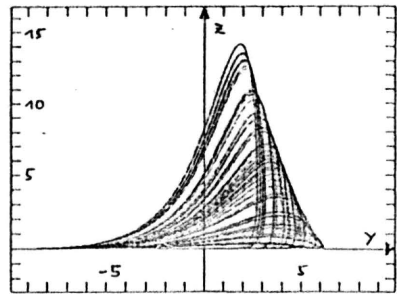
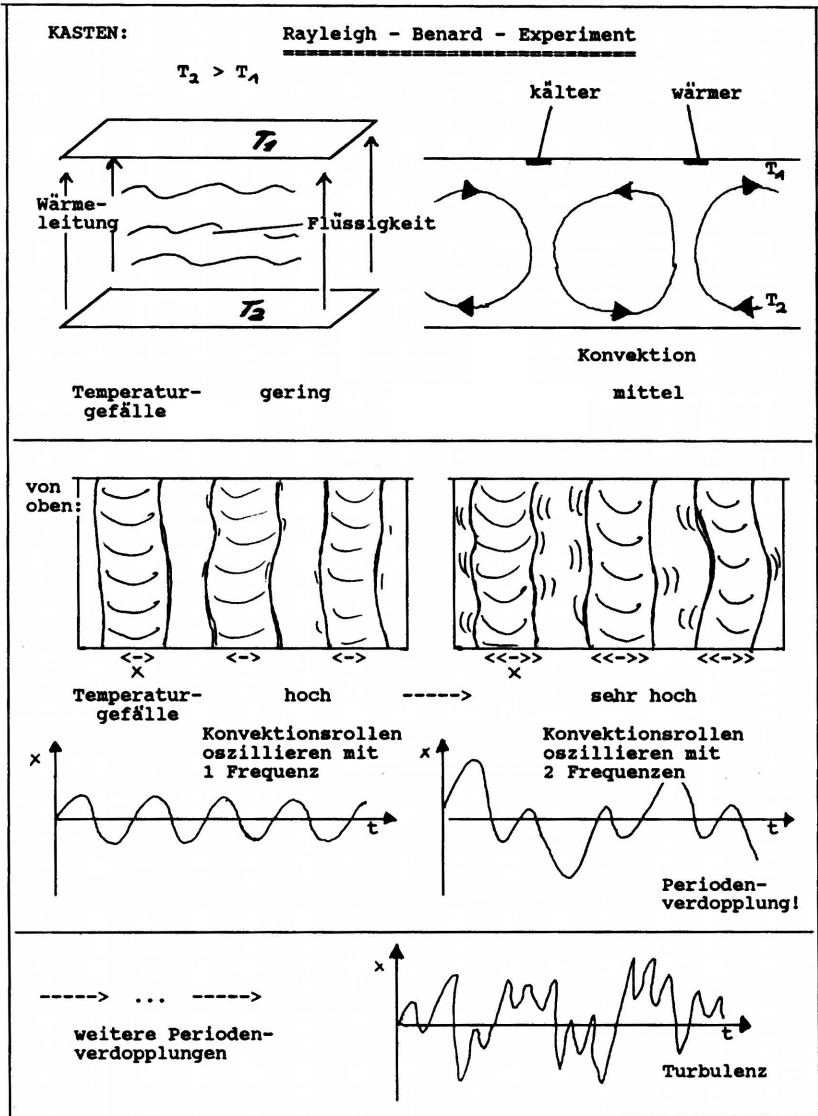


Abb. 12



Trägt man das Frequenzspektrum der Oszillationen in Abhängigkeit vom Temperaturgefälle auf, dann erhält man übrigens wieder ein Muster wie bei der logistischen Gleichung (Abb. 1). Die Turbulenz in der Konvektionszone der Sonne können wir indirekt beobachten, denn das Erscheinungsbild der Granulation auf der Sonnenoberfläche ist einem stetigen Wandel unterworfen: Die mittlere Lebensdauer für die Granulationszellen beträgt nur zehn Minuten.

Bisher haben wir sehr einfache chaotische Systeme diskutiert. Für das weitere Verständnis des Artikels ist es notwendig, sich über grundlegende theoretische Methoden, die zur Untersuchung vermutter chaotischer Systeme in der Himmelsmechanik angewandt werden, ein Bild zu machen.

Der Liapunov-Exponent

Bei Computersimulationen von dynamischen Systemen kommt es grundsätzlich immer zu einem Rundungsfehler, der sich im Laufe der (Rechen-) Zeit aufsummiert: Läßt man zwei Testteilchen mit nahezu denselben Anfangsbedingungen loslaufen, so werden sich die Teilchen rechenfehlerbedingt gemäß einem Potenzgesetz statistisch voneinander entfernen.

Bei Auftreten von Chaos wachsen zusätzlich die Unsicherheiten in den Anfangsbedingungen multiplikativ von einem Rechenschritt zum nächsten, die Teilchen entfernen sich folglich zusätzlich exponentiell voneinander.

Die Exponentialfunktion wächst aber schneller als jede Potenz, deshalb werden bei chaotischen Systemen im Computer chaotische Effekte gegenüber den durch Rechenfehler bewirkten statistischen Effekten nach einer gewissen Zeit überwiegen.

Das exponentielle Anwachsen von Unsicherheiten in den Anfangsbedingungen ist also ein Indikator für chaotisches Verhalten.

Als Maß des Auseinanderstrebens zweier Test-Systeme dient der "Liapunov-Exponent" l : Wenn $d(0)$ und $d(t)$ die Abweichung einer bestimmten Größe der beiden Systeme (z.B. Abstand zwischen zwei Teilchen) zu den Zeiten 0 und t bezeichnen, gilt das oben erwähnte Exponentialgesetz:

$$d(t) = d(0) * \exp(l*t).$$

Löst man nach dem Exponenten auf, so erhält man eine Formel, nach der sich in der Praxis l bestimmen läßt:

$$l = \ln(d(t)/d(0)) / t,$$

wenn man die Zeit t gegen unendlich und $d(0)$ (Anfangsabweichung) gegen Null gehen läßt.

Es steht so ein Indikator für chaotisches Verhalten zur Verfügung: Bestimmt man l für Abweichungen verschiedener Größen d der beiden Systeme nach dieser Formel und gilt für den größten vorkommenden Liapunov-Exponenten $l_{\max} > 0$, so ist das dynamische System chaotisch für die betreffende Größe.

Bei der großen Sonnensystem-Simulation der Amerikaner Sussman und Wisdom von 1988, bei der die Bewegung des äußeren Planetensystems für 845 Millionen Jahre in die Zukunft berechnet wurde, war d der Abstand zweier "Test-Plutos", die fast am selben Ort auf die Reise geschickt wurden, also mit sehr kleinem $d(0)$.

Die Ergebnisse dieser Simulation werden im zweiten Teil des Artikels besprochen. Ferner wird der Leser dort die Darstellung der Bewegung dynamischer Systeme im sogenannten "Phasenraum" kennenlernen. Wer sich schon vorab informieren will, der sei auf [3] verwiesen.

Die beiden Programme zur logistischen Gleichung und zum Rössler-Oszillator habe ich unter Turbo-Pascal 5.0 programmiert und gebe sie gerne an Interessenten weiter!

W. Wriggers

Literatur

- [1] F. Scheck: Mechanik / Von den Newtonschen Gesetzen zum deterministischen Chaos, Springer-Verlag, 2. Aufl [1990]
- [2] D. Fischer: Die Bahnen der Planeten: ein chaotisches System? Sterne und Weltraum 29, S.28ff [1/1990]
- [3] R. Dvorak, M.Karch: Chaos und Himmelsmechanik, Sterne und Weltraum 27, S.350ff, 525ff [6+9/1988]

